TD7 Ex 17

1. Cas particulier $n=3$. $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec d_1, d_2, d_3 2 à 2 $\neq$

Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonale alors d'après le cours $AM = MA$ puisque deux matrices diagonales commutent.

Réciproquement soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tq $AM = MA$.

On note $M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$

Alors $AM = \begin{pmatrix} d_1 x & d_1 y & d_1 z \\ d_2 x' & d_2 y' & d_2 z' \\ d_3 x'' & d_3 y'' & d_3 z'' \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} d_1 x & d_2 y & d_3 z \\ d_1 x' & d_2 y' & d_3 z' \\ d_1 x'' & d_2 y'' & d_3 z'' \end{pmatrix}$

donc $AM = MA \iff \begin{cases} d_1 y = d_2 y \\ d_1 z = d_3 z \\ d_2 x' = d_1 x' \\ d_2 z' = d_3 z' \\ d_3 x'' = d_1 x'' \\ d_3 y'' = d_2 y'' \end{cases} \underset{\substack{d_1 \neq d_2 \\ d_1 \neq d_3 \\ d_2 \neq d_3}}{\iff} y = z = x' = z' = x'' = y''$

Donc $M = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y' & 0 \\ 0 & 0 & z'' \end{pmatrix}$. M est diagonale.

On a donc : $AM = MA \iff M$ est diagonale.

Cas général $A = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $d_1, \dots, d_n$ 2 à 2 distincts

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale alors $AM = MA$ puisque deux matrices diagonales commutent.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AM = MA$.

On a donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(AM)_{i,j} = (MA)_{i,j}$

ie $d_i \times M_{i,j} = M_{i,j} \times d_j$

Si $i \neq j$ on a $d_i \neq d_j$ donc $M_{i,j} = 0$.

Ceci prouve que M est diagonale.

On a donc : $\boxed{AM = MA \iff M \text{ est diagonale}}$

⚠ Ceci est faux si A est une matrice diagonale quelconque.

En effet $A = I_n$ commute avec toutes les matrices, et pas seulement avec les matrices diagonales.

3. Si $A = \lambda . I_n$, où $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$AM = \lambda . M = M \times A$$

Réciproquement soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA$

En particulier : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A \times E_{i,j} = E_{i,j} \times A$

où $E_{i,j} = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$;

donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & a_{j,1} & 0 \\ & a_{j,2} & \\ & \vdots & \\ 0 & a_{j,n} & 0 \end{pmatrix} \\ \text{colonne } j \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & 0 & & \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \cdots & a_{n,i} \\ & 0 & & \end{pmatrix} & \text{ligne } i \end{array}$

donc si $k \neq j$, $a_{j,k} = 0$

et $a_{j,j} = a_{i,i}$ (coeff commun entre la ligne et la colonne ci-dessus)

Donc A est diagonale et tous les coeffs de la diagonale sont égaux. En notant $\lambda \in \mathbb{K}$ leur valeur commune : $A = \lambda . I_n$.

Donc : $\boxed{\left(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\right) \Longleftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda . I_n\right)}$