Exercice 6

1) A l'ordre 4 : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

donc à l'ordre 5 : $x(2+\cos x) \underset{x\to 0}{=} 3x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5)$

A l'ordre 5 : $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$

D'où : $x(2+\cos x) - 3\sin x \underset{x\to 0}{=} 3x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - 3x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{40} + o(x^5)$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{60} + o(x^5)$$

donc : $x(2+\cos x) - 3\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^5}{60}$

Donc $\frac{x(2+\cos x) - 3\sin x}{x^5} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{60}$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x(2+\cos x) - 3\sin x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{60} = \frac{1}{60}}$

2) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x}$

- Dénominateur : $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $x^2 \cdot \sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^4$
- Numérateur : à l'ordre 4, $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

donc $\sin^2 x = (\sin x) \times (\sin x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^4)$

$$\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Rem : $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2}\left(1-\left(1-\dfrac{(2x)^2}{2}+\dfrac{(2x)^4}{24}\right)\right)+o(x^4)$ ②

$$\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

mais ce n'est pas plus simple ....

On a donc $x^2 - \sin^2 x \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$

donc $x^2 - \sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^4}{3}$

- Par quotient d'équivalents : $\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{3}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{3}}$

3) On procède de même : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)} = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x \cdot \ln(1+x)}$

On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $x \cdot \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

Et à l'ordre 2 : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

Par quotient d'équivalents :

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x.\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}}$

4) On exponentie : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

Comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ on a $\frac{1}{x}.\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$

donc $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 \neq 0$

Pour se ramener à une quantité qui tend vers 0 on met e en facteur :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = e \times \left(e^{\frac{1}{x}.\ln(1+x)-1} - 1\right)$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} e \times \left(\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1\right)$$

puisque $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1\right) = 1 - 1 = 0$

et $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$

Mais à l'ordre 2 : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc $\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} + o(x)$

à l'ordre 1

donc $\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{2}$

Ainsi $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{e}{x} \times \left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{e}{2}$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}}$