Exercice 7

1) $$\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}=\frac{\sin t-t}{t.\sin t}\sim\frac{-t^3/6}{t^2}=\frac{-t}{6}$$

car $\sin t \underset{0}{\sim} t$

$\sin t - t \sim -\frac{t^3}{6}$ puisque $\sin t \underset{0}{=} t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)$

Ainsi $$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}\right)=\lim_{t\to 0}-\frac{t}{6}=\boxed{0}$$

$$-\frac{1}{t^2}+\frac{\cos t}{\sin^2 t}=\frac{t^2.\cos t-\sin^2 t}{t^2.\sin^2 t}$$

or $t^2\sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} t^4$

et à l'ordre 4 : $$\sin^2 t \underset{t\to 0}{=} \left(t-\frac{t^3}{6}\right)^2+o(t^4)$$
$$\underset{t\to 0}{=} t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^4)$$
$$t^2.\cos t \underset{t\to 0}{=} t^2.\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)$$
$$\underset{t\to 0}{=} t^2-\frac{t^4}{2}+o(t^4)$$

donc $$t^2.\cos t-\sin^2 t \underset{t\to 0}{=} -\frac{t^4}{6}+o(t^4)$$

donc $$t^2.\cos t-\sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^4}{6}$$

Ainsi $\lim_{t \to 0}\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)=\boxed{-\frac{1}{6}}$

2) On exponentie :

$$\left(e^x - \sin x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \exp\left[\frac{1}{\sin^2 x} \times \ln\left(e^x - \sin x\right)\right]$$

$$= \exp\left[\varphi(x)\right]$$

On cherche la limite de $\varphi(x)$ lorsque $x \to 0$.

à l'ordre 2 : $e^x - \sin x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - x + o(x^2)$

$$\underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{donc } e^x - \sin x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

et en particulier : $\lim_{x \to 0}\left(e^x - \sin x - 1\right) = 0$

On utilise alors que $\ln(1+t) \underset{t \to 0}{\sim} t$:

$$\ln\left(e^x - \sin x\right) = \ln\left(1 + e^x - \sin x - 1\right) \underset{x \to 0}{\sim} e^x - \sin x - 1$$

$$\underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

③

Comme $\sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ on a : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{e}}$

3) Ici la difficulté vient du fait que $x \to 1$.

On pose $x = 1+h$ ie $h = x-1$

• $e^x - e.x = e^{1+h} - e.(1+h) = e\times(e^h - 1 - h)$

$\underset{h\to 0}{\sim} e.\frac{h^2}{2}$ puisque $e^h \underset{h\to 0}{=} 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$

donc $e^x - e.x \underset{x\to 1}{\sim} \frac{e}{2}(x-1)^2$ ⚠ Ne pas développer

• $\sqrt{x} - \ln(1+x) + \ln 2 - 1 = \sqrt{1+h} - \ln(2+h) + \ln 2 - 1$

$= \sqrt{1+h} - 1 - \ln\left(1+\frac{h}{2}\right) \underset{h\to 0}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{3}{48}h^3 - 1 - \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24}\right) + o(h^3)$

$\underset{h\to 0}{=} \frac{h^3}{48} + o(h^3)$

donc $\sqrt{x} - \ln(1+x) + \ln 2 - 1 \underset{x \to 1}{\sim} \frac{(x-1)^3}{48}$

- Par quotient d'équivalents : $\frac{\sqrt{x} - \ln(1+x) + \ln 2 - 1}{e^x - e.x} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{x-1}{24.e}$

donc $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \ln(1+x) + \ln 2 - 1}{e^x - e.x} = 0}$