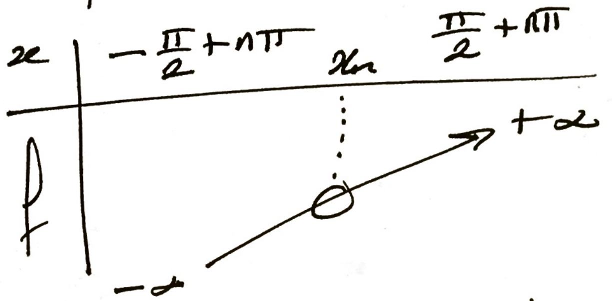
(1) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

La fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$

$\forall x \in I_n,\ f'(x) = \tan^2(x) > 0$ sauf en $n\pi$.

Donc $f$ est strictement croissante sur $I_n$.




$f$ est continue et strictement croissante sur $I_n$. D'après le théorème de la bijection monotone, $f$ est bijective de $I_n$ vers $f(I_n) = \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$ : $\exists!\, x_n \in I_n,\ f(x_n) = 0$.

Donc $\boxed{\exists!\, x_n \in I_n,\ \tan(x_n) = x_n.}$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2} + n\pi$

ce qui donne par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$

Donc $\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n\pi}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

De plus on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tan(x_n) = x_n$

donc $\arctan(\tan(x_n)) = \arctan(x_n)$

Comme $\tan$ est $\pi$-périodique : $\tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$

donc $\arctan(\tan(x_n)) = \arctan(\tan(x_n - n\pi))$

$= x_n - n\pi$ car $-\frac{\pi}{2} < x_n - n\pi < \frac{\pi}{2}$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n\pi + \arctan(x_n)$

D'autre part la fonction $\varphi : x \longmapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$$

Donc $\varphi$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\varphi(1) = 2.\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ on a donc montré que :

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)}$$

On sait que $\arctan t \underset{t \to 0}{\sim} t$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

donc $\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$

donc $\boxed{x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi}}$

donc $x_n \underset{n \to +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

3 Comme $\arctan t \underset{t \to 0}{=} t + o(t^2)$

on a : $\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{x_n} + o\left(\frac{1}{x_n^2}\right)$

et comme $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n\pi$ on a $x_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2 \cdot \pi^2$

donc on peut remplacer $o\left(\frac{1}{x_n^2}\right)$ par $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $x_n \underset{n \to +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\underset{n \to +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{x_n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

on cherche un réel $\alpha$ tel que :

$$\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{x_n} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \times \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{x_n}\right)$

or $\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - n\pi}{x_n \times n\pi} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)}{x_n \times n\pi} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{(n\pi)^2}$

$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2\pi}$

donc on trouve $\alpha = \frac{1}{2\pi}$

donc $\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

C'est un développement asymptotique à 4 termes de $x_n$ lorsque $n \to +\infty$.